数理解析研究所講究録
1513巻 2006年 91-103

関孝和の翦管術　其の二

聖心女子学院　田辺寿美枝 (Sumie Tanabe)
Sacred Heart Senior High School

1　はじめに

関孝和（1640？～1708）の『括要算法』[1]は関自身が1680年～1683年に書いたものをもとに、関の没後の1712年、関流の門弟、荒木村英、大高由昌によって編集、出版されたものである.元(げん)、亨(こう)、利(り)、貞(てい)の4巻からなるこの『括要算法』の亨巻（第2巻）で述べられている「翦管術(せんかんじゅつ)」について、京都大学数理解析研究所講究録1257「数学史の研究」に引き続き解読すること、及び中国のいくつかの算書から関孝和『括要算法』の「翦管術」への流れ、或いは当時の数学的背景をも合わせ考え、関の「翦管術」の特質について述べることを目的としている.

2　「翦管術」とその流れ

「翦管術」とは、連立1次合同式「$x \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $\cdots$, $x \equiv r_n \pmod{m_n}$」(以下、剰余方程式と呼ぶ) の解法のことであり、「中国剰余定理」(Chinese Remainder Theorem) と呼ばれることも多く見受けられるが、現在中国では「孫子定理」と呼ばれているものである.「翦管術」という名称は、中国、南宋の『楊輝算法』(1274～1275年，楊輝) の「續古摘奇算法」(1275年) の中で使われていたものである. 関はこの『楊輝算法』を読み (参考文献[B10][C1][C5][C6]) そこから「翦管術」という名称を援用したものと考えられている。

剰余方程式「$x \equiv r_i \pmod{m_i}$, $i = 1, \cdots n$,　但し $(m_i, m_j) = 1$ $(i \neq j)$」$\cdots$　(1)
についての中国の算書に伝わる解法を以下に述べる[2].

[1]京都大学電子図書館　http://ddb.libnet.kulib.kyoto-u.ac.jp/exhibit/kicho/06-41.html
で見ることができる.
[2]整数 a、b の最大公約数を (a, b)、最小公倍数を $\{a, b\}$ と表す.

まず $i=1,2,\cdots$ それぞれについて、

$$\text{不定方程式「}\ \frac{M}{m_i}x - m_i y = 1,\quad \text{但し}\, M = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n\text{」} \cdots (2)$$

を解き、$\frac{M}{m_i}x$ を x_i とする.この x_i は

$$\text{「}x_i \equiv 1 \pmod{m_i},\quad x_i \equiv 0, \pmod{m_j}\ (i \neq j)\text{」} \cdots (3)$$

を満たすので、剰余類　$x \equiv \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \pmod{M}$　を剰余方程式（1）の解、と考えるところであるが、これら x のうち正の最小数のみを答としている.

このように中国の伝統的な解法では“与えられた条件を満たす最小の正の整数のみを答としている”. この点は特に注目すべき点であるといえよう. このことは、不定方程式を“一般解で答える”という意識がないこと、及び負の数の概念が全くなかった訳ではないが、限定的な認識に留まり、少なくとも答の対象として「負の数」を認知するに至っていなかった当時の数の認識の段階的状況を示しているといえよう.

暦をはじめ商いなど現実的な問題解決の手段として発達した流れから一般解を求める必要がなかったこと、更に数式の表記法、notation が確立していなかったこと、数の概念、数の集合論的認識が発達していなかったことなどによる限界であったと推察される.

3　『括要算法』の「諸約の法」、「剰一術」

関孝和は「括要算法」亨巻の中で、まず前編において「諸約の法」として、互約、逐約、斉約、遍約、増約、損約、零約、遍通 (公約数、公倍数、通分など) 及び剰一[3]などの諸約術について述べ、続く後編を「翦管術解」と名付け、前編の約術を道具立てとして、9 題の剰余方程式及びその解法を示している.

前編「諸約の法」で述べられいる約術、互約、逐約、斉約、遍約、増約、損約、零約、遍通、剰一については参考文献 [C5] で既に述べてあるので、本稿では割愛する.

[3]「一を余す」という意味から 1 次不定方程式「$ax - by = 1$, ただし $(a, b) = 1$」の解法を『括要算法』(1680 年～1683 年著、1712 年出版) では「剰一」と呼んでいる. ただし関はこの「剰一」のことを建部賢明、建部賢弘と共著である『大成算経』(1683 年～1710 年) にあっては「累約」と呼んでいる. 『大成算経』も http://ddb.libnet.kulib.kyoto-u.ac.jp/exhibit/kicho/06-41.html で見ることができる.

4 関孝和の「翦管術」

関孝和の『括要算法』亨巻の後編「翦管術解」に収められている剰余方程式は以下の9題である.

$\boxed{1}$ $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$ 答 $x = 16$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{36} \\ x \equiv 14 \pmod{48} \end{cases}$ 答 $x = 110$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$ 答 $x = 26$

$\boxed{4}$ $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{8} \\ x \equiv 5 \pmod{10} \end{cases}$ 答 $x = 75$

$\boxed{5}$ $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{9} \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$ 答 $x = 128$

$\boxed{6}$ $\begin{cases} 35x \equiv 35 \pmod{42} \\ 44x \equiv 28 \pmod{32} \\ 45x \equiv 35 \pmod{50} \end{cases}$ 答 $x = 13$

$\boxed{7}$ $\begin{cases} 8x \equiv 2 \pmod{3} \\ 7x \equiv 3 \pmod{4} \\ 6x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$ 答 $x = 13$

$\boxed{8}$ $\begin{cases} 34x \equiv 6 \pmod{8} \\ 34x \equiv 14 \pmod{20} \\ 34x \equiv 23 \pmod{27} \end{cases}$ 答 $x = 11$

$\boxed{9}$ $\begin{cases} 13x \equiv 3 \pmod{7} \\ 13x \equiv 8 \pmod{9} \end{cases}$ 答 $x = 11$

関はそれぞれに特色のある剰余方程式9題をきれいに配置し、提示している.
『孫子算経』(400年頃)、『数書九章』(1247年)、『楊輝算法』(1275年)、『算法統宗』(1592年) など中国の算書に古くから伝わる剰余方程式 、

「$x \equiv r_i \pmod{m_i},\ i = 1, \cdots n,$ 但し $(m_i, m_j) = 1\ (i \neq j)$」

をさらに一般化して

「$a_i x \equiv r_i \pmod{m_i},\ i = 1, \cdots n,$ 但し $(m_i, m_j) = 1\ (i \neq j)$」

とし、しかも、$(m_i, m_j) \neq 1$、即ち、法 m_i, m_j が互いに素でない問題をも扱っている.

実際に、

第1問から第5問は $a_i = 1$ である問題、

第6問から第9問は $a_i \neq 1$ の問題、

さらに、

奇数番の問題は法が互いに素、$(m_i, m_j) = 1$ である問題、

偶数番の問題は法が互いに素でない、$(m_i, m_j) \neq 1$ である問題

と配置されている.

本稿では、これら9題の問題の中から、$a_i \neq 1$ でありかつ法が互いに素でない問題、即ち関孝和の「翦管術」としての最も特徴的な、本質的な問題である第6問について現代文及び現代の数学式を用いて解読し、「翦管術」の本質の解明を試みることとする.

5　『括要算法』の「翦管術解」第6問

以下実線四角枠内は原文、それに続く破線四角枠内は原文の内容を現代語、現代の数式を用いて表したものである. 更にその後に続く枠外に、必要に応じて解説を補充、加筆したものである.

・問題文と答

今有物、不知総数、只云、三十五乗、四十二除余三十五箇. 四十四乗、三十二除余二十八箇. 四十五乗、五十除余三十五箇. 問総数幾何.
答曰、総数一十三箇.

$$\boxed{6}\begin{cases} 35x \equiv 35 \pmod{42} & \cdots\cdots① \\ 44x \equiv 28 \pmod{32} & \cdots\cdots② \\ 45x \equiv 35 \pmod{50} & \cdots\cdots③ \end{cases} \qquad \text{答}\quad x = 13$$

以下の**術文**の後に続く**解文**の中で関は剰余方程式 $\boxed{6}$ を

$$\boxed{6}''\begin{cases} 5x \equiv 5 \pmod{3} & \cdots\cdots①'' \\ 11x \equiv 7 \pmod{8} & \cdots\cdots②'' \\ 9x \equiv 7 \pmod{5} & \cdots\cdots③'' \end{cases}$$

として解いている.

・術文

術曰、三十五乗四十二除余七約之、以八十乗之、得四百箇

$35x \equiv 35 \pmod{42}$ の余り 35 を 7 で約した数 5 に 80 をかけ、400 を得る.

関はこの 7（35 と 42 の最大公約数）を 35 **乗** 42 **除の約法**、80 を 35 **乗** 42 **除の除法**と呼んでいる. ここで、35 **乗** 42 **除の除法** 80 とは以下の合同式④を満たす数である.

$$5 \times 80 \equiv 1 \pmod{3}, \quad 11 \times 80 \equiv 0 \pmod{8}, \quad 9 \times 80 \equiv 0 \pmod{5} \cdots\cdots \quad ④$$

四十四乗三十二除余四約之、以七十五乗之、得五百二十五箇

$44x \equiv 28 \pmod{32}$ の余り 28 を 4 で約した数 7 に 75 をかけ 525 を得る.

この 4（44 と 32 の最大公約数）を 44 **乗** 32 **除の約法**、75 を 44 **乗** 22 **除の除法**と呼んでいる. ここで、44 **乗** 22 **除の除法** 75 とは以下の合同式⑤を満たす数である.

$$5 \times 75 \equiv 0 \pmod{3}, \quad 11 \times 75 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 9 \times 75 \equiv 0 \pmod{5} \cdots\cdots \quad ⑤$$

四十五乗五十除余五約之、以二十四乗之、得一百六十八箇

$45x \equiv 35 \pmod{50}$ の余り 35 を 5 で約した数 7 に 24 をかけ、168 を得る.

この 5（45 と 50 の最大公約数）を 45 **乗** 50 **除の約法**、24 を 45 **乗** 50 **除の除法**と呼んでいる. ここで、24 とは以下の合同式⑥を満たす数である.

$$5 \times 24 \equiv 0 \pmod{3}, \quad 11 \times 24 \equiv 0 \pmod{8}, \quad 9 \times 24 \equiv 1 \pmod{5} \cdots\cdots \quad ⑥$$

三位相併、共得一千零九十三箇

3 つの数を合わせて、400+525+168=1093 を得る.

満一百二十去之、余一十三個、為総数、合問.

1093 から 120 未満になるまで 120 を引き、余り 13 を総数とすると、問題に合う.

以上それぞれの**約法**と**除法**の求め方などを、続く解文の中で語っている.

・解文

解曰、三十五与四十二互減、得等数七、是三十五乗四十二除之約法、以約三十五乗四十二除、爲五乗六除.

35 と 42 を互に引いて最大公約数 7 を得る．この 7 を 35 **乗** 42 **除の約法**という．この 7 で 35 乗 42 除を約し、5 乗 6 除とする．

即ち、 $35x \equiv 35 \pmod{42}$ ……① を $5x \equiv 5 \pmod{6}$ ……①′ とする．

四十四与三十二互減、得等数四、是四十四乗三十二除之約法、以約四十四乗三十二除、為一十一乗八除.

44 と 32 を互に引いて最大公約数 4 を得る．この 4 を 44 **乗** 32 **除の約法**という．この 4 で 44 乗 32 除を約し、11 乗 8 除とする．

即ち、 $44x \equiv 28 \pmod{32}$ ……② を $11x \equiv 7 \pmod{8}$ ……②′ とする．

四十五与五十互減、得等数五、是四十五乗五十除之約法、以約四十五乗五十除、為九乗一十除.

45 と 50 を互に引いて、最大公約数 5 を得る．この 5 を 45 **乗** 50 **除の約法**という．この 5 で 45 乗 50 除を約し、9 乗 10 除とする．

即ち、 $45x \equiv 35 \pmod{50}$ ……③ を $9x \equiv 7 \pmod{10}$ ……③′ とする．

以上から、 $\boxed{6}\begin{cases} 35x \equiv 35 \pmod{42} \cdots ① \\ 44x \equiv 28 \pmod{32} \cdots ② \\ 45x \equiv 35 \pmod{50} \cdots ③ \end{cases}$ は $\boxed{6}'\begin{cases} 5x \equiv 5 \pmod{6} \cdots ①' \\ 11x \equiv 7 \pmod{8} \cdots ②' \\ 9x \equiv 7 \pmod{10} \cdots ③' \end{cases}$

と書き換えることができる．

更に、

六除八除一十除、依逐約術、得三除八除五除．依図布算.

6、8、10 を**逐約**して、3、8、5 を得る．**書き換えた式を図で示す**.

五乗	三除
一十一乗	八除
九乗	五除

$$\boxed{6}'' \begin{cases} 5x \equiv 5 & (\text{mod } 3) \cdots ①'' \\ 11x \equiv 7 & (\text{mod } 8) \cdots ②'' \\ 9x \equiv 7 & (\text{mod } 5) \cdots ③'' \end{cases}$$

剰一術（不定方程式 $ax - by = 1$ の解法）を用いるためには、x, y（剰余方程式における各式の法）が互いに素でなければならない．しかし、剰余方程式$\boxed{6}'$の法 [6,8,10] は互いに素ではないので、**逐約**[4]して得た [3,8,5] を新たな法として書き換えている．即ち初めに与えられた剰余方程式$\boxed{6}$を$\boxed{6}'$から更に$\boxed{6}''$に置き換えて解く、としている．

しかし、ここで互いに素でない法 [6,8,10] を**逐約**し、互いに素である法 [3,8,5] として書き換えることは、剰余方程式一般では同値と云えない書き換えであり、問題のあるところ、慎重に考える必要があるところである．

即ち、法 $[m_1、m_2、m_3]$ が互に素でない剰余方程式、

「$a_1x \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a_2x \equiv r_2 \pmod{m_2}$, $a_3x \equiv r_3 \pmod{m_3}$」……(*)

とその法を**逐約**し、新たな法 $[m'_1、m'_2、m'_3]$ に置き換えて得られる剰余方程式

「$a_1x \equiv r_1 \pmod{m'_1}$, $a_2x \equiv r_2 \pmod{m'_2}$, $a_3x \equiv r_3 \pmod{m'_3}$」…(**)

とは一般には同値といえない．

剰余方程式 (*) と (**) が同値であるための条件は、

$$(\#) \begin{cases} a_1r_2 \equiv a_2r_1 & (\text{mod } (m_1, m_2)) \\ a_2r_3 \equiv a_3r_2 & (\text{mod } (m_2, m_3)) \\ a_3r_1 \equiv a_1r_3 & (\text{mod } (m_3, m_1)) \end{cases}$$

であり、剰余方程式 (*) が解を持つための必要十分条件もまた (#) である．
またその時、解は法の最小公倍数 $\{m_1、m_2、m_3\}$ において一意である (参考文献 [B1][B4])．

『括要算法』に取り上げられている剰余方程式９題のうち、偶数番の４題は法が互いに素でない問題であったが、それらの４題はみな悉く条件 (#) を満たしているものである．

さて『括要算法』本文に戻り、解釈を進めよう．

---

[4]互いに素でない自然数の組について、その組の最小公倍数を変えずに、各２数が互いに素となるように約すこと．　[例]（105,112,126）を逐約すると（5,16,63）となる．逐約の結果は一意ではない．

以五乗為左、以三除為右、依剰一術、得左二段.

(①″の) 乗数 5 を左、(①″の法)3 を右とした不定方程式「$\overset{左}{5}x-\overset{右}{3}y=1$」を
剰一術によって解いて、

$x=2$　(左二段という)……　⑦　　を得る.

$5\times 2=3y+1$　であることから、$5\times 2\equiv 1 \pmod 3$　が得られたことになる.

以一十一乗為左、以八除為右、依剰一術、得左三段.

(②″の) 乗数 11 を左、(②″の法) 8 を右とした不定方程式「$\overset{左}{11}x-\overset{右}{8}y=1$」を
剰一術によって解いて、

$x=3$　(左三段という)……　⑧　　を得る.

$11\times 3=8y+1$　であることから、$11\times 3\equiv 1 \pmod 8$　が得られたことになる.

以九乗為左、以五除為右、依剰一術、得左四段.

(③″の) 乗数 9 を左、(③″の法) 5 を右とした不定方程式「$\overset{左}{9}x-\overset{右}{5}y=1$」を
剰一術によって解いて

$x=4$　(左四段という)……　⑨　　を得る.

$9\times 4=5y+1$　であることから、$9\times 4\equiv 1 \pmod 5$　が得られたことになる.

八除五除相因、得四十、為左、以三除、為右、依剰一術、得四十、以左二段乗之、得八十、為三十五乗四十二除法.

(②″の法) 8 と (③″の法) 5 を掛け合わせた 40 を左、(①″の法) 3 を右とした
不定方程式「$40z-3w=1$」を**剰一術**を用いて解いて、

左 $40z=40$　を得る.

更にこの 40 に⑦式の左二段 2 をかけた数 80 を 35 **乗** 42 **除の除法**とする.

ここで 35 **乗** 42 **除の除法** $80=2\times 40$ は、

$40=3w+1$、また⑦より $5\times 2=3y+1$　と書けるので、

$5\times 80=\underline{5\times 2}\times 40\quad=\underline{(3y+1)}\times(3w+1)$

即ち　$5\times 80\equiv 1 \pmod 3$、更に　$11\times 80\equiv 0 \pmod 8$、$9\times 80\equiv 0 \pmod 5$

三除五除相因、得一十五、為左、以八除為右、依剰一術、得一百零五、以左三段、乗之、得三百一十五、満一百二十去之、余七十五、為四十四乗三十二除法.

(①″の法) 3 と (③″の法) 5 を掛け合わせた 15 を左、(②″の法) 8 を右とした不定方程式「$15z - 8w = 1$」を**剰一術**を用いて解いて、

左 $15z = 105$ を得る.

この 105 に⑧式の左三段 3 をかけ $3 \times 105 = 315$ を得る.

更にこの 315 から 120 を引けるだけ引いた余り 75 を 44 **乗** 22 **除の除法**とする.

ここで $105 = 15 \times 7$ は $8w + 1$ と書け、また⑧より $11 \times 3 = 8y + 1$ と書けるので、

$$11 \times 315 = \underline{11 \times 3} \times 105 = \underline{(8y + 1)}(8w + 1)$$

即ち　$11 \times 315 \equiv 1 \pmod 8$、更に　$5 \times 315 \equiv 0 \pmod 3$、$9 \times 315 \equiv 0 \pmod 5$

となっている. この 315 から**去法** 120 (3,8,5 の最小公倍数 120) を引けるだけ引いた数 75 もまた上の合同式を満たしている. 即ち、

$$11 \times 75 \equiv 1 \pmod 8、\quad 5 \times 75 \equiv 0 \pmod 3、\quad 9 \times 75 \equiv 0 \pmod 5$$

三除八除相因、得二十四、為左、以五除為右、依剰一術、得九十六、以左四段乗之、得三百八十四、満一百二十去之、余二十四、為四十五乗五十除法.

(①″の法) 3 と (②″の法) 8 を掛け合わせた 24 を左、(③″の法) 5 を右とした不定方程式「$24z - 5w = 1$」を解いて、

$24z = 96$ を得る.

この 96 に⑨式の左四段 4 をかけ、$4 \times 96 = 384$ を得る.

更にこの 384 から去法 120 を引けるだけ引いた余り 24 を 45 **乗** 50 **除の除法**とする.

前段までと同様に考え、

$$9 \times 384 = \underline{9 \times 4} \times 96 = \underline{(5y + 1)}(5w + 1)$$

従って 384 から去法 120 を引いた数 24 も、以下の合同式を満たしている.

$$9 \times 24 \equiv 1 \pmod 5、\quad 5 \times 24 \equiv 0 \pmod 3、\quad 11 \times 24 \equiv 0 \pmod 8$$

三除、八除、五除相乗、得一百二十、為去法.

(剰余方程式 $\boxed{6}''$ の法) 3、8、5 を掛け合わせて得た数 120 を去法とする.

去法とは剰余方程式の各式の法の最小公倍数として定められ、合同式の関係を保つ数として解法の最終段階で減法に用いられる数である[5]. 剰余方程式$\boxed{6}$から剰余方程式$\boxed{6}''$への書き換えでは、法を逐約していたが、逐約は最小公倍数を変えない約法であるので、去法120は剰余方程式$\boxed{6}$の去法でもある、即ち$\boxed{6}$の法[42、32、50]の最小公倍数でもあることがここに保障されている.

6 中国の算書との照応

もともと、中国では暦学上の必要により古くから剰余方程式の解法が確立し、伝えられてきたものと考えられている.『孫子算経』(400年頃，著者不詳) の中で「物不知其総数」として1題あるものが嚆矢とされ、その後も数多くの算書のなかで「物不知其総数」「大衍総数術」「翦管術」さらには「秦王暗點兵」「韓信點兵」「鬼谷算」など様々に呼ばれてきたものである.『数書九章』(1247年，秦九韶) の中では「大衍総数術」として9題、『楊輝算法』(1275年，楊輝) のなかでは「翦管術」として5題、さらに時代を下って、『算法統宗』(1592年，程大位) では「物不知其総数」或いは「韓信點兵」として3題収められている.

ただ、このような古くからの多くの研究成果の中で算書という形で現在に伝えられているものは一部であり、更にその中で日本まで伝来し、関孝和の「翦管術」に影響があったことが確認されているものは『楊輝算法』と『算法統宗』のみであるとされている (参考文献 [B2][B3]). 確かに『楊輝算法』は 1673 年又は 1661 年に関本人が写本した (参考文献 [B10][C1][C5][C6]) とされるものの写しが残っている.
また、『算法統宗』はその本文中に孫子歌として、

「三人同行七十稀　五樹梅花廿一枝
七子團圓正半月　除百令五便得知」[6]

を載せているが、『括要算法』では『算法統宗』にあるとその名を明記した上で、孫子歌を引用、紹介している.

以上により、関をはじめ当時の和算家達が『楊輝算法』、『算法統宗』この2冊の算書を学習し、少なからず影響を受けていたことは確かであるといえよう.

---

[5]『塵劫記』などで「百五減算」と紹介され、その名に使われている 105 は、各式の法が [3,5,7] である剰余方程式の去法である.

[6]法が [3,5,7] である剰余方程式「百五減算」における三除法７０、五除法２１、七除法１５、去法１０５を覚えやすいように読み込んだ七言絶句である.

しかし、それら２冊の算書には不定方程式の解法（『括要算法』でいう剰一術）については何も記されていない．数多くある中国の算書の中にあっても、不定方程式の解法を示してあるのは『数書九章』だけであり、しかも、法 $[m_i, m_j]$ が互いに素でない問題を扱っているものもまた『数書九章』だけである．

ただし今日までの研究において、『数書九章』は日本に伝来した形跡はないとされ、従って関孝和をはじめ和算家達への『数書九章』の直接的な影響はなかった、とされている (参考文献 [B2][B3])．その『数書九章』—「大衍類」(第１巻、第２巻) に挙げられている剰余方程式９題[7] の法は以下のものである．

① 蓍卦發微 …… [1, 2, 3, 4]
② 古曆會積 …… $[365\frac{1}{4}, 29\frac{499}{940}, 60]$
③ 推計土功 …… [54, 57, 75, 72]
④ 推庫額銭 …… [12, 11, 10, 9, 8, 7, 6]
⑤ 分糶推原 …… [0.83, 1.10, 1.35]
⑥ 程行計地 …… [300, 240, 180]
⑦ 程行相及 …… [300, 250, 200]
⑧ 積尺尋源 …… [130, 110, 120, 60, 25, 100, 30, 20]
⑨ 餘米推數 …… [19, 17, 12]

最後の第９問を除く総ては法が互いに素でない問題となっている．しかも、分数、小数或いは桁数の大きな数を法としている．秦九韶はこれら法の種類に応じて問題を分類し、名を付け、その分類に応じた解法を示している (参考文献 [B8][C3])．

一方関孝和の『括要算法』では、互いに素でない法の問題を扱ってはいるものの、それら法はすべて整数の範囲内の、しかも平易な数値の問題ばかりであった．

7　結び

関孝和は『括要算法』亨巻で、法が互いに素でない問題を敢えて取り上げ、巧みに術を駆使し、順序立てて解き進めている．このことによって「剰余方程式を一般的に解いたこと」を関孝和の功績としている著述も多く見られる (参考文献 [B2][B3])．しかし、

[7]第３巻天時類の第３問「治曆演紀」も剰余方程式の問題とみなすことができる．法は 60 と $29\frac{8967}{16900}$

・先に指摘した中国の算書からの伝統を受け、正の最小数のみを答えとしている. 解文の最終段階で去法を定義し、その去法を引けるだけ引く、としていること、或いは当時「百五減算」などと剰余方程式の呼び名に去法が使われていたことなどは、ある意味で剰余類を視野に収めている、と見ることもできようが、それらをまとめた類として答える段階までの認識には至っていない.

・法が互いに素でない剰余方程式が解を持つための条件（#）をある程度認識した上でその条件に適った４題を提示していた、とも考えられるが、少なくとも条件（#）に言及していない.

・『括要算法』(1712 年) に先んずること 450 年以上の南宋、隣国中国に於て秦九韶が、既に法が互いに素でない剰余方程式を扱い、その解法を示している. しかも関の示した解法は『数書九章』と酷似しており、秦九韶のあげた９題の方が数値的には、遥かに複雑な、難易度の高いものであった.

以上を鑑みるに、「剰余方程式を一般的に解いたこと」を関孝和の功績とすることは憚られることであろう. しかし、『数書九章』の「大衍総数術」と『括要算法』の「翦管術」は、解法こそ類似している点が多くあるが、それぞれの９題は実に趣きの異なるものとなっている. 『数書九章』は易、暦をはじめとした具体的、実際的な問題を扱い、それぞれの問題には“余米”、“額銭”など問題の状況に応じた名が付けられている。しかもその数値は極めて煩雑なものばかりである. 一方『括要算法』の９題はすべて完全に抽象化された問題であり、その数値は平易なものばかりである. そして『括要算法』では問題が一般化され、数値が単純、平易となっているが故に、「剰一」や「翦管術」の本質が却って際立ち、明快に提示されていると云えるのではないだろうか. このことこそ、関の数学的資質を物語っていると云えるのではないだろうか.

「数学」の本質とも云える一般化する力、抽象化する感性を関は備えていた. これが関の神髄であり、この抽象性の純度の高さによってこそ、関は評価されるべきものであろう.
「剰余方程式の解法を確立した」という過大評価ではなく、関の生きたその時代背景の中にあって傑出した抽象数学の感性、資質を持った数学者であったことを『括要算法』の「翦管術」は示している. 本稿は『括要算法』の「翦管術」第６問を解読することを通してその理解を深めることを目的とした. 何故ならば、この問題が関の「翦管術」の真髄を語っているものと考えているからであった. 関孝和は『括要算法』だけでなく、建部賢明、建部賢弘との共著である『大成算経』(1683 年～1710 年) 第６巻においても「翦管術」の名で剰余方程式を扱っている. そこにはまた趣向の異なる問題を含め 17 題の剰余方程式が収められている. 中国の算書の数々から『括要算法』へ、そして『大成算経』、という剰余方程式の解法の流れ、発展、異同について更に考察を深めたいと考えている.

参考文献

A．原典 [A 1] 著者不詳『孫子算経』中国科学技術典籍通彙 數學卷

[A 2] 秦九韶『数書九章』 中国科学技術典籍通彙 數學卷

[A 3] 秦九韶『数学九章』 欽定四庫全書

[A 4] 楊輝 『楊輝算法』 中国科学技術典籍通彙 數學卷

[A 5] 程大位『算法統宗』 中国科学技術典籍通彙 數學卷

[A 6] 関孝和『括要算法』

[A 7] 関孝和、建部賢明、建部賢弘『大成算経』

B．著作 [B 1] 高木貞治『初等整数論講義』共立出版 1931 年

[B 2] 日本学士院編 『明治前日本数学史』第 2 巻 岩波書店 1956 年

[B 3] 平山諦『関孝和』恒星社厚生閣 1959 年

[B 4] I.M.Vinogradoff『整数論入門』共立出版 1959 年

[B 5] 平山諦『東西数学物語』恒星社厚生閣 1973 年

[B 6] 薮内清『中国の数学』岩波新書 1974 年

[B 7] 平山諦, 下平和夫, 広瀬秀雄編『関孝和全集』大阪教育図書 1974 年

[B 8] 伊東俊太郎編『数学の歴史 II 中世の数学』 共立出版 1987 年

[B 9] 銭宝琮 (川原秀城訳)『中国数学史』みすず書房 1990 年

[B 10] 平山諦『和算の誕生』恒星社厚生閣 1993 年

[B 11] J.C.Martzloff『A History of Chinese Mathmatics』
Springer-Verlay 1997 年

[B 12] V.J.Katz(上野健爾、三浦伸夫監訳)『カッツ 数学の歴史』
共立出版 2005 年

C．論文 [C 1] 平山諦 「関孝和が楊輝算法を写した年」
日本数学史学会『数学史研究』68:1 − 2 1976 年

[C 2] 杉本敏夫 「孫子の算法」
明治学院大学論叢『総合科学研究』5:1 − 24 1980 年

[C 3] 沈康身 「秦九韶の大衍総数術と関孝和の諸約術」
日本数学史学会『数学史研究』109:1 − 23 1986 年

[C 4] 城地茂 「もうひとつの天元術・大衍求一術」
日本数学史学会『数学史研究』148:1 − 12 1996 年

[C 5] 田辺寿美枝「関孝和の『翦管術』」
『京都大学数理解析研究所講究録』1257:114 − 124 2003 年

[C 6] 城地茂 「中田高寛写・石黒信由蔵『楊輝算法』について」
『京都大学数理解析研究所講究録』1392:46 − 59 2004 年